TORNEIO DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS ESTADUAIS DO PIAUÍ

2ª Fase Ensino Médio

SOLUÇÃO DA 2ª FASE

Solução do Problema 1

a) **(6 pontos)**

$27 \oplus 18 = 2 \times (27 + 18) + 1 = 2 \times 45 + 1 = 91$

$12 \odot 23 = 2 \times 12 \times 23 - 1 = 551$

b) **(6 pontos)**

O número 2023 pode ser obtido de diversas maneiras diferentes através das duas operações.

- Para se obter 2023 na primeira operação, deve-se ter
$a \oplus b = 2023 \Rightarrow 2 \times (a + b) + 1 = 2023 \Rightarrow a + b = 1011.$ (1)

- Para se obter 2023 na segunda operação, deve-se ter
$a \odot b = 2023 \Rightarrow 2 \times a \times b - 1 = 2023 \Rightarrow a \times b = 1012.$ (2)

Assim, alguns exemplos de como poderia ser obtido o número 2023 seria:

- usando a primeira operação, com $a = 1000$ e $b = 11$;
- usando a segunda operação, com $a = 4$ e $b = 253$.

c) **(8 pontos)**

Usando-se as definições das operações dadas, tem-se

$(a \odot b) \oplus c = (2 \times a \times b - 1) \oplus c = 2 \times [(2 \times a \times b - 1) + c] + 1.$

Assim,

$2 \times [(2 \times a \times b - 1) + c] + 1 = 15 \Rightarrow 2 \times a \times b - 1 + c = 7 \Rightarrow 2 \times a \times b + c = 8$ (3)

Portanto, os valores de a, b e c são tais que a última equação acima deve ser satisfeita. Algumas das respostas válidas são

- $a = 1, b = 4, c = 0$;
- $a = 2, b = 2, c = 0$;
- $a = 4, b = 1, c = 0$;
- $a = 1, b = 3, c = 2$;

- $a = 3, b = 1, c = 2$;
- $a = 1, b = 2, c = 4$;
- $a = 2, b = 1, c = 4$;
- $a = 1, b = 1, c = 6$;
- $a = 0, b = 0, c = 8$.

Solução do Problema 2

a) **(5 pontos)**
Os números são, por exemplo, 235, 335, 522 etc, num total de $3 \times 3 \times 3 = 27$, uma vez que podemos fazer 3 escolhas possíveis para a ordem das centenas, 3 para a ordem das dezenas e 3 para as unidades.

b) (**7 pontos**)

São exatamente quatro posição distintas, por vez, em que o algarismo 5 deve ocupar: unidades, dezenas, centenas e unidade de milhar.

Para cada uma dessas quatro posições distintas ocupadas com o algarismo 5, temos $2 \times 2 \times 2 = 8$ maneiras de completar o número a partir da escolha sucessiva dos algarismos 2 e 3 para cada uma das três posições restantes.

Logo, são exatamente $4 \times 8 = 32$ números com quatro algarismos em que o 5 aparece uma única vez.

c) (**8 pontos**)

Calcularemos a quantidade de números com um único algarismo 5, com exatamente três algarismos 5 e com todos os algarismos iguais a 5, para posteriormente somar todas essas quantidades.

Seguindo a ideia do item (b), temos exatamente $5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$ números de cinco algarismos em que o algarismo 5 aparece uma única vez.

Para calcular a quantidade de números com cinco algarismos, em que cada um apresenta exatamente três algarismos iguais a 5, devemos escolher inicialmente, entre todas as ordens (posições) dos dígitos de um número com 5 algarismos, três que serão ocupadas com o algarismo 5. Isso pode ser calculado como $(5 \times 4 \times 3)/3! = 10$. Ou seja, o primeiro algarismo pode ocupar 5 lugares, o segundo pode ocupar 4 lugares e o terceiro pode ocupar qualquer um dos três lugares restantes. Portanto, $5 \times 4 \times 3 = 60$. Nessa contagem, cada grupo de três algarismos iguais a 5 está contado $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ vezes. Daí o resultado: $(5 \times 4 \times 3)/3! = 10$.

Para completar a contagem total dos números de cinco algarismos com exatamente três algarismos iguais a 5, devemos multiplicar por $2 \times 2 = 4$, o número de escolhas possíveis para os algarismos 2 e 3 que completam o número. Logo, $10 \times 4 = 40$ é a quantidade procurada.

Existe apenas um número com cinco algarismos iguais a 5: 55555.

Finalmente, são, portanto, $80 + 40 + 1 = 121$ números com uma quantidade ímpar de algarismos iguais a 5.

Solução do Problema 3

a) **(6 pontos)**

Seguindo a ideia de que $1 + 3 + 5 + 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$, onde temos os quatros primeiros números ímpares, podemos observar que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$. Dessa forma, podemos concluir que 1, 3, 5, 7, 9 e 11 são os seis primeiros números ímpares cuja soma é idêntica à soma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$.

b) **(8 pontos)**

Para calcular o número total de bolinhas em um quadrado que apresenta a soma $1 + 3 + 5 + \cdots + 21$, consideraremos um quadrado idêntico ao mostrado na figura, dividido em quatro partes, cada uma contendo $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$ bolinhas. Portanto, temos $4 \times (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21) = 4 \times 121 = 484$ bolinhas.

A resposta à segunda pergunta pode ser dada diretamente do resultado da soma $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 121 = 11 \times 11$. Isto é, um quadrado, não necessariamente idêntico ao da figura, com um total de 121 bolinhas apresenta 11 bolinhas em cada um dos seus lados. Pela definição de raiz quadrada,

$$\sqrt{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21} = \sqrt{121} = 11$$

c) **(6 pontos)**

É possível reorganizar as bolinhas em cada uma das quatro partes do quadrado, inicialmente dispostas em formato triangular, para uma disposição em forma de quadrado, onde o número de bolinhas em cada lado do quadrado é exatamente igual ao número de bolinhas na altura do triângulo.

Essa nova disposição facilita a contagem do número de bolinhas em cada lado do quadrado, ou seja, o cálculo da "raiz quadrada" do total de bolinhas na disposição triangular.

Para isso, é suficiente saber o número de bolinhas na altura do triângulo inicial, ou seja, o número de termos da soma $1 + 3 + 5 + \cdots 2021 + 2023$.

Cada n-ésimo termo dessa soma pode ser expresso como $2n - 1$, onde n representa a quantidade de termos até o n-ésimo. Como $2023 = 2 \times 1012 - 1$, concluímos que a expressão $1 + 3 + 5 + \cdots 2021 + 2023$ possui 1012 termos.

Portanto, 1012 é a quantidade de bolinhas em cada lado do quadrado, ou seja,

$$1012 = \sqrt{1 + 3 + 5 + \cdots 2021 + 2023}$$

Solução do Problema 4

a) **(5 pontos)**

Vamos usar a notação A(X) para a área do polígono X, sendo X o polígono.

Note que a área do triângulo BMC é igual à área do triângulo MAC, pois MB = MA (já que M é o ponto médio de AB) e a altura de ambos é a distância entre o ponto C e o lado AB. Usando o mesmo raciocínio, podemos concluir que as áreas dos triângulos ANC e NDC são iguais. Logo,

$$A(ABCD) = A(BMC) + A(MAC) + A(ANC) + A(NDC) \Leftrightarrow$$

$$A(ABCD) = A(MAC) + A(MAC) + A(ANC) + A(ANC) \Leftrightarrow$$

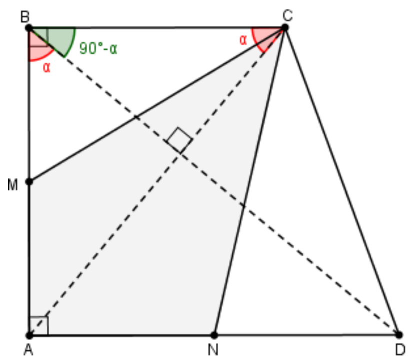
$$A(ABCD) = 2.[A(MAC) + A(ANC)] \Leftrightarrow$$

$$A(ABCD) = 2.A(AMCN)$$

A última igualdade representa o que queríamos mostrar.

b) **(5 pontos)**

Vamos usar a notação M(∠XYZ) para indicar a medida do ângulo Y, de lados YX e YZ. Como as diagonais do retângulo ABCD são perpendiculares, podemos concluir que M(∠DBC) + M(∠ACB) = 90°. Além disso, temos que M(∠ABD) + M(∠DBC) = 90°. Das igualdades descritas, podemos concluir que M(∠ACB) = M(∠ABD). Sabendo, também, que M(∠ABC) = M(∠BAD) = 90°, podemos concluir que os triângulos ABC e DAB são semelhantes pelo caso AA. A figura ilustra a explicação.



c) **(5 pontos)**

Da semelhança mostrada o item (b), podemos concluir que os lados correspondentes nos triângulos ABC e DAB são proporcionais. Em particular, temos que $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AB}$, que é equivalente a $(AB)^2$ = AD . BC, donde $(AB)^2$ = 16 . 9 = 144. Finalmente, AB = 12.

d) **(5 pontos)**

Do enunciado e do item (c), podemos concluir que a área do trapézio ABCD é dada por

$$A(ABCD) = \frac{(AD+BC).AB}{2} = \frac{(16+9).12}{2} = 150$$

Do item a), temos que A(ABCD) = 2.A(AMCN), donde $A(AMCN) = \frac{A(ABCD)}{2} = \frac{150}{2} = 75$.